

DOI: 10.7652/xjtuxb201307022

旋转声源延迟时间方程求解的数值研究

董帆, 陈启明, 于跃平

(合肥通用机械研究院压缩机技术国家重点实验室, 230031, 合肥)

摘要: 为提高气动噪声时域数值算法的计算速度, 针对亚音速匀速圆周运动的点声源, 将延迟时间方程的求解问题转化为求抛物线与余弦曲线的交点, 转化后的方程形式简洁并且数值计算效率更高。使用分段二次函数对延迟时间方程中的余弦函数进行替换, 得到一种新的高精度迭代初值计算方法, 并分别采用 Newton 迭代和 Halley 迭代算法求解延迟时间方程。研究表明: 相对于通常的固定初值给定法, 所提出的分段二次近似迭代初值计算方法可以减少约 20% 的计算时间, 且 Halley 迭代算法具有较好的计算效率和收敛特性。

关键词: 气动噪声; 延迟时间方程; 运动声源; 迭代算法

中图分类号: O355 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)07-0120-04

Numerical Research on Retarded-Time Equation for Uniformly Rotating Aeroacoustic Sources

DONG Fan, CHEN Qiming, YU Yueping

(State Key Laboratory for Compressor Technology, Hefei General Machinery Research Institute, Hefei 230031, China)

Abstract: To speed up the noise prediction of aeroacoustic sources, the retarded-time equation for a subsonic uniformly rotating point source was transformed into a simple and efficient one. A more accurate initial value estimation method based on the piecewise parabolic approximation of the trigonometric function was presented. Moreover, the Newton's method and the Halley's method were applied to solve the reformed retarded-time equation iteratively. The results show that the present initial value estimation method will reduce the computational time by 20%, and the Halley's method behaves better than the Newton's method in computation efficiency and convergence characteristics.

Keywords: aerodynamic noise; retarded-time equation; rotating aeroacoustic sources; iterative algorithm

自从 Farassat 提出 F1A 公式^[1], FW-H 方程的时域积分求解方法便更加广泛地应用于飞机螺旋桨、流体机械叶轮等运动声源的气动噪声预测。延迟时间方程的求解是开发时域噪声预测程序时必须解决的一个关键问题。延迟时间方程反映了声音信号的传播特性, 由于介质中声速为有限值, 源点激发的声音信号必须经过某一段时间的传播才能被观察

点感受到。当声源直线匀速运动时, 由观察点时刻可以很方便地求得源点发射时刻^[2]。然而, 当声源旋转运动时, 延迟时间方程的形式变得复杂, 只能通过数值迭代算法进行求解, 一些研究者推荐应用二分法^[3]或 Newton 迭代法^[4-7]求解。对于复杂的声源运动形式, 延迟方程求解会耗用大量的计算时间, Farassat 等学者强调了优化延迟时间方程求解算法

收稿日期: 2012-11-15。 作者简介: 董帆(1983—), 女, 工程师。 基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目(2012CB026001)。

网络出版时间: 2013-04-18

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20130418.1720.003.html>

的重要性^[8]。

本文针对亚音速匀速旋转的运动点源,探讨其延迟时间方程的高效求解方法。首先,对延迟时间方法进行归一化和变形处理,将其转化成求解余弦曲线与抛物线交点的问题,并使用分段二次函数对余弦函数进行近似,得到一种高精度迭代初值计算方法。最后,分别应用 Newton 迭代法和 Halley 迭代法求解变形后的延迟时间方程,探讨不同迭代算法的收敛特性和计算效率。

1 数值求解方法

设某一点源绕 z 轴做匀速圆周运动,角速度为 ω ,则在柱坐标系下, τ 时刻点源坐标为 $\bar{r}_y = (r_y, \omega\tau + \theta_y, z_y)$,静止观察点坐标为 $\bar{r}_x = (r_x, \theta_x, z_x)$,如图 1 所示。设声速为 c_0 ,延迟时间方程可以写为

$$t - \tau - \frac{r}{c_0} = 0 \quad (1)$$

其中 $r = (r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\omega\tau + \theta_y - \theta_x) + (z_x - z_y)^2)^{1/2}$ 。

采用时域积分方法预测气动噪声时,一般观察点接收到声音信号的时刻 t 为已知参数,需要通过延迟时间方程来确定声源发出该信号的时刻 τ ,以便于计算该时刻的声源信息。

对延迟时间方程进行归一化得到

$$\bar{t} - \bar{\tau} - M R(\bar{\tau}) = 0 \quad (2)$$

式中: $R(\bar{\tau}) = (1 + \bar{r}^2 + \bar{z}^2 - 2\bar{r}\cos(\bar{\tau} + \Delta\theta))^{1/2}$, $\bar{r} = r_x / r_y$, $\Delta\theta = \text{sgn}(\omega)(\theta_y - \theta_x)$, $\bar{z} = (z_x - z_y) / r_y$; $\bar{\tau} = |\omega|\tau$; $\bar{t} = |\omega|t$; $M = |\omega| r_y / c_0$ 。

实际应用中,观察点一般位于声源旋转区域之外,故本文假设 $\bar{r}^2 + \bar{z}^2 > 1$ 。

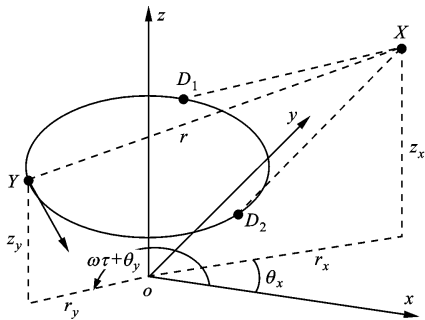


图1 点源和观察点相对位置示意图

方程(2)为超越方程,需要通过数值迭代方法求解。当点源以亚音速运动时,方程有唯一解。本文研究仅针对亚音速旋转点源。方程(2)含有开方运算,为提高计算速度,对延迟时间方程进行变形得到

如下形式

$$\cos(\chi - \varphi) = -\frac{\chi^2}{2\bar{r}M^2} + \frac{1 + \bar{r}^2 + \bar{z}^2}{2\bar{r}} \quad (3)$$

式中: $\chi = \bar{t} - \bar{\tau}$ 是声音信号从点源传播到观察点所用的时间(简称传播时间)。当给定观察点时刻后,相位角 $\varphi = \bar{t} + \Delta\theta$ 也随之确定。

1.1 迭代初值计算方法

方程数值迭代求解算法的一个关键问题是迭代初值如何选取,如果初值选择偏差较大,则容易导致迭代过程更加耗时,甚至引起计算发散。

如果对某一点源求解一系列观察点时刻上的延迟时间方程,且相邻两次求解的观察点时刻相差不大,则可以用前一次的迭代结果作为下一个观察点时刻求解的初值,但对于第一个观察点时刻,其求解的初值必须人为给定。通过点源旋转轨迹圆心到观察点的距离,可以计算得到一个固定不变的迭代初值,这是一个比较简便的迭代初值选取方案^[9]。但是,这个初值相对于真值的误差必然较大,只能寄希望于迭代算法具有较好的稳定性,才可以保证计算收敛。

分析方程(3), φ 随观察点时刻线性变化,方程等号左边为一个向横轴正方向偏移 φ 单位的余弦波,等号右边是一个关于纵轴对称的抛物线。对于不同的观察点时刻,抛物线固定不动,而余弦波随观察点时刻的增加向横轴正方向传播。如果将左侧的余弦函数用分段二次函数来近似,则方程(3)变为可以直接求解的二次方程。相对于使用固定初值,该方法可以大幅提高迭代初值的精度。

构造分段二次近似函数前,首先要确定余弦函数的基准点。取抛物线右支与横轴的交点 $\chi_p = M(1 + \bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}$,定义近似函数的中心点为

$$\chi_c = \varphi + \pi \left(\frac{1}{2} + 2 \lfloor (\chi_p - (\varphi - \frac{\pi}{2})) / 2\pi \rfloor \right) \quad (4)$$

式中: $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示下取整运算。在区间 $[\chi_c - \pi, \chi_c + \pi]$ 内,利用 $(\chi_c, 0)$ 、 $(\chi_c \pm \pi/12, \mp (3^{1/2} - 1)/2^{3/2})$ 、 $(\chi_c \pm \pi/6, \mp 1/2)$ 、 $(\chi_c \pm \pi/3, \mp 3^{1/2}/2)$ 、 $(\chi_c \pm \pi/2, \mp 1)$ 、 $(\chi_c \pm \pi, 0)$ 这些特殊点构造分为 6 段的二次近似函数,并将该函数代入方程(3),即可由一元二次方程求根公式得到迭代初值。限于篇幅,具体过程从略。

1.2 数值迭代方法

方程(3)将延迟时间方程的求解转化为求余弦曲线和抛物线交点的问题。为进一步提高求解效率,本文除了采用常规的 Newton 迭代法以外,还使

用具有三阶收敛速度的 Halley 迭代法求解变形后的延迟时间方程,并对两种算法进行对比研究。令

$$F(\chi) = -\frac{\chi^2}{2\bar{r}M^2} + \frac{1 + \bar{r}^2 + \bar{z}^2}{2\bar{r}} - \cos(\chi - \varphi) = 0 \quad (5)$$

则 Halley 迭代法^[10]的计算式为

$$\chi_{n+1} = \chi_n - \frac{F(\chi_n)/F'(\chi_n)}{1 - F(\chi_n)F''(\chi_n)/(2[F'(\chi_n)]^2)} \quad (6)$$

2 数值算例及分析

本节将采用不同迭代初值计算方法和迭代算法对变形后的延迟时间方程进行求解,以对比不同方法的精度和收敛特性。

若源点时刻 $\bar{\tau}$ 为已知,利用延迟时间方程,可以毫无困难地得到 $\bar{t}$ 。因此,取一组 $\bar{\tau}^*$ 作为基准,直接计算得到 $\bar{t}$,然后利用数值迭代算法通过 $\bar{t}$ 得到源点时刻的计算值 $\bar{\tau}$,比较 $\bar{\tau}$ 和 $\bar{\tau}^*$,可以研究迭代算法的精度及收敛特性。在点源旋转一圈的过程中,取 1 000 个等距分布的采样点,求解误差定义为 $\varepsilon = \lg(|(\bar{\tau} - \bar{\tau}^*)/\bar{\tau}^*|)$ 。点源旋转速度越高、观察点距离源点越近时,对迭代算法稳定性和计算效率的要求越苛刻,因此本文计算条件选为 $M=0.99$ 、 $\bar{r}=1.1$ 、 $\bar{z}=0$ 。

2.1 迭代初值精度

变形后的延迟时间方程以声音信号传播的归一化时间为求解变量。 $\chi_0 = \chi_0^+$ 表示采用本文提出的分段二次近似方法得到的迭代初值。 $\chi_0 = M(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}$ 为信号从点源旋转中心传到观察点所用的时间,在点源旋转一圈的过程中,均使用这一固定数值作为迭代初值。另一种固定初值给定方式是取方程(3)中抛物线与横轴的交点 $\chi_0 = M(1 + \bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}$ 。

图 2 给出了这 3 种初值计算方法的相对误差。从图中可以看出,本文提出的分段二次近似法明显优于另两种固定初值方法,初值的预测精度至少提高了 2 个量级。

2.2 迭代方法比较

基于本文提出的分段二次近似迭代初值计算方法,图 3 对比了 Newton 迭代法和 Halley 迭代法的收敛特性。图中最左面的白色区域的计算结果大约有 3 位有效精度,右侧深灰色表示迭代计算已经达到近 100 位有效精度。Newton 迭代法在大部分源点时间需要 6 个迭代步才能收敛,但在 $\bar{\tau} = \frac{7\pi}{4}$ 时 7

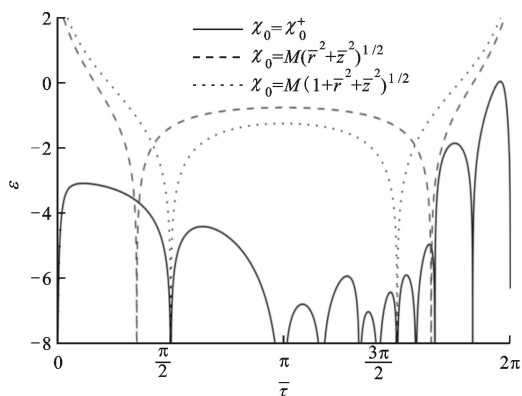
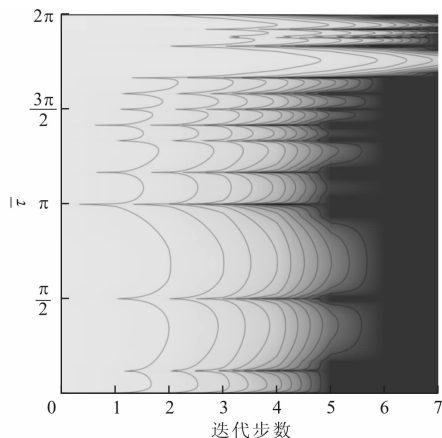
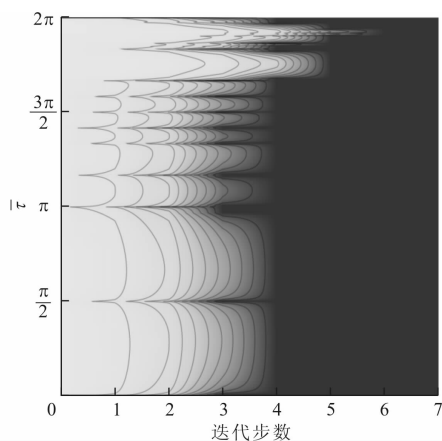


图 2 3 种迭代初值计算方法的相对误差

次迭代仍不能收敛,而 Halley 迭代法比 Newton 迭代法至少快了 2 个迭代步。



(a) Newton 迭代法



(b) Halley 迭代法

图 3 迭代算法收敛特性对比

2.3 计算耗时对比

为测试不同算法的计算耗时,在点源旋转一圈的过程中等间隔选取 20 000 个采样点,记录迭代求解过程的用时,计算结果见表 1。迭代收敛标准设为 10^{-80} 。

当采用固定初值结合 Newton 迭代法时,计算用时最长,用该数据对计算耗时进行归一化处理。从表 1 可以看出:采用分段二次近似初值计算方法后,Newton 和 Halley 迭代法的计算耗时均减少 20%左右;无论采用何种初值计算方法,Halley 迭代法均比 Newton 迭代法要快至少 14%。因此,计算延迟时间方程时,应采用 Halley 迭代法加速计算,首次求解时的迭代初值可采用本文提出的分段二次近似算法来确定,后续时间步的迭代初值可以选用前一时间步的求解结果。

表 1 计算耗时对比

初值选取	计算耗时	
	Newton 迭代法	Halley 迭代法
固定初值	1.000	0.820
分段二次近似算法	0.775	0.670

3 结 论

针对亚音速匀速旋转声源气动噪声时域积分求解方法中的延迟时间方程,本文将其变换为一种更易求解的形式,并采用分段二次函数逼近余弦函数,得到一种高精度的迭代初值计算方法,该方法可以节省 20%左右的迭代计算时间。通过对 Newton 和 Halley 迭代法收敛特性的数值研究,发现 Halley 迭代法计算效率更高。在进行大规模气动噪声计算时,Halley 迭代法是更为经济的选择。

参考文献:

[1] FARASSAT F, SUCCI G P. A review of propeller discrete frequency noise prediction technology with emphasis on two current methods for time domain calculations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1980, 71 (3): 399-419.

[2] GARRICK I E, WATKINS C E. A theoretical study of the effect of forward speed on the free-space sound-

pressure field around propellers, NACA-TR-1198 [R]. Hampton, USA: Langley Research Center, 1954.

[3] 李东红,杨亦春. 直升机噪声计算中延时方程的求解 [C/OL]//中国声学学会 2010 年全国会员代表大会暨学术会议论文集. 哈尔滨:中国声学学会,2010 [2012-09-25]. <http://cpfd.cnki.com.cn/Area/CPFDCONFArticleList-OGSM201012001-7.htm>.

[4] 孙晓峰,周盛. 气动声学 [M]. 北京:国防工业出版社,1994.

[5] BRENTNER K S. Prediction of helicopter rotor discrete frequency noise: a computer program incorporating realistic blade motions and advanced acoustic formulation, NASA-TM-87721 [R]. Hampton, USA: Langley Research Center, 1986.

[6] NYSTROM P A, FARASSAT F. A numerical technique for calculation of the noise of high-speed propellers with advanced blade geometry, NASA-TP-1662 [R]. Hampton, USA: Langley Research Center, 1980.

[7] LYRINTZIS A S. Surface integral methods in computational aeroacoustics—from the (CFD) near-field to the (acoustic) far-field [J]. International Journal of Aeroacoustics, 2003, 2(2): 95-128.

[8] FARASSAT F. Derivation of formulations 1 and 1A of Farassat, NASA/TM-2007-214853 [R]. Hampton, USA: Langley Research Center, 2007.

[9] 宋辰瑶,徐国华. 前飞状态下直升机旋翼旋转噪声预测 [J]. 声学技术, 2009, 28(2): 157-163.

SONG Chenyao, XU Guohua. Numerical prediction for the acoustic noise of helicopter rotor in forward flight [J]. Technical Acoustics, 2009, 28(2): 157-163.

[10] PRESS W H. Numerical recipes: the art of scientific computing [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007: 442-463.

(编辑 荆树蓉)

(上接第 72 页)

[7] 曹冲锋,杨世锡,杨将新. 大型旋转机械非平稳振动信号的 EEMD 降噪方法 [J]. 振动与冲击, 2009, 28 (9): 33-37.

CAO Chongfeng, YANG Shixi, YANG Jiangxin. De-noising method for non-stationary vibration signals of large rotating machineries based on ensemble empirical mode decomposition [J]. Journal of Vibration and

Shock, 2009, 28(9): 33-37.

[8] 陈可,李野,陈澜. EEMD 分解在电力系统故障信号检测中的应用 [J]. 计算机仿真, 2010, 3(2): 63-66.

CHEN Ke, LI Ye, CHEN Lan. Ensemble empirical mode decomposition for power quality detection application [J]. Computer Simulation, 2010, 3(2): 63-66.

(编辑 管咏梅)